



1 ?? Расстояние s , которое проехал Баг между звонками.

Воспользуемся тем, что средняя скорость движения $v_{\text{ср}}$ на всем пути равна скорости движения на отрезке между звонками Глюка. Весь путь можно определить, как $S_1 + S_2 - s$, а условие равенства средних скоростей можно будет записать так:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S_1 + S_2 - s}{t} = \frac{s}{t_2 - t_1}. \tag{1}$$

Откуда находим, что

Ответ: $s = 150$ км

2 ?? Скорости движения Бага v_1 , v_2 и v_3 на первом, втором и третьем участках, соответственно.

Средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = v_1 = \frac{s}{t_2 - t_1} = \frac{150 \text{ км}}{2,5 \text{ ч}} = 60 \text{ км/ч}.$$

Также теперь легко определить, что весь путь из города в деревню составил $L = 600$ км.

Аналитическое решение:

Рассмотрим все три возможных варианта:

- 1. Первый звонок был совершён на первом участке, второй — на втором.
- 2. Первый звонок был совершён на первом участке, второй — на третьем.
- 3. Первый звонок был совершён на втором участке, второй — на третьем.

При реализации первых двух вариантов первый звонок должен быть совершён на расстоянии $L - S_1 = 350$ км от города. Однако, при этом скорость на первом участке составит $\tilde{v}_1 = (L - S_1)/t_1 \approx 54 \text{ км/ч} \neq v_1$, что противоречит ранее найденному v_1 . Тогда возможен только третий вариант, при котором первый звонок был совершён на втором участке пути, а второй — на третьем.

Тогда скорость Бага на третьем участке: $v_3 = \frac{L - S_2}{t - t_2} = 100 \text{ км/ч}$.

Скорость на втором участке не может быть в 2 раза больше v_3 , ведь тогда средняя скорость на всем пути точно будет превосходить 60 км/ч . Значит v_2 в два раза меньше v_3 и $v_2 = 50 \text{ км/ч}$. Или альтернативно, поскольку средняя скорость движения Бага до первого звонка меньше средней скорости на всём пути, то скорость на втором участке должна быть меньше средней скорости. Тогда скорость на третьем участке вдвое превосходит скорость на втором участке: $v_3 = 2v_2$. В противном случае, средняя скорость на всём пути точно будет меньше 60 км/ч .

Графическое решение:

Построим график (см. рис. 1) зависимости пути, который проехал автомобиль, от времени. В момент времени $t = 10$ ч автомобиль проехал $L = 600$ км. Обозначим точку 3, соответствующую этому состоянию. Проведем прямую из начала координат в точку 3. Эта прямая соответствует движению со средней скоростью. И, очевидно, ее часть совпадает с графиком на первом участке. В момент времени $t_1 = 6.5$ ч автомобиль проехал $L - S_1 = 350$ км. Обозначим точку 4, соответствующую этому состоянию.

В момент времени $t_2 = 9$ ч автомобиль проехал $L - S_2 = 500$ км. Обозначим точку 5, соответствующую этому состоянию.

График третьего участка — это часть прямой, проходящей через точки 3 и 5. Проведем ее. По наклону прямой можно определить скорость на третьем участке — $v_3 = \frac{150}{1,5} = 100 \text{ км/ч}$. Заметим, что v_3 больше средней скорости, тогда скорость автомобиля на втором участке $v_2 = \frac{v_3}{2} = 50 \text{ км/ч}$. Поскольку в обратном случае, если $v_2 = 2v_3 = 200 \text{ км/ч}$, средняя скорость на всём пути будет превышать $v_{\text{ср}} = 60 \text{ км/ч}$, что противоречит условию.

Ответ: $v_1 = 60 \text{ км/ч}$, $v_2 = 50 \text{ км/ч}$, $v_3 = 100 \text{ км/ч}$.

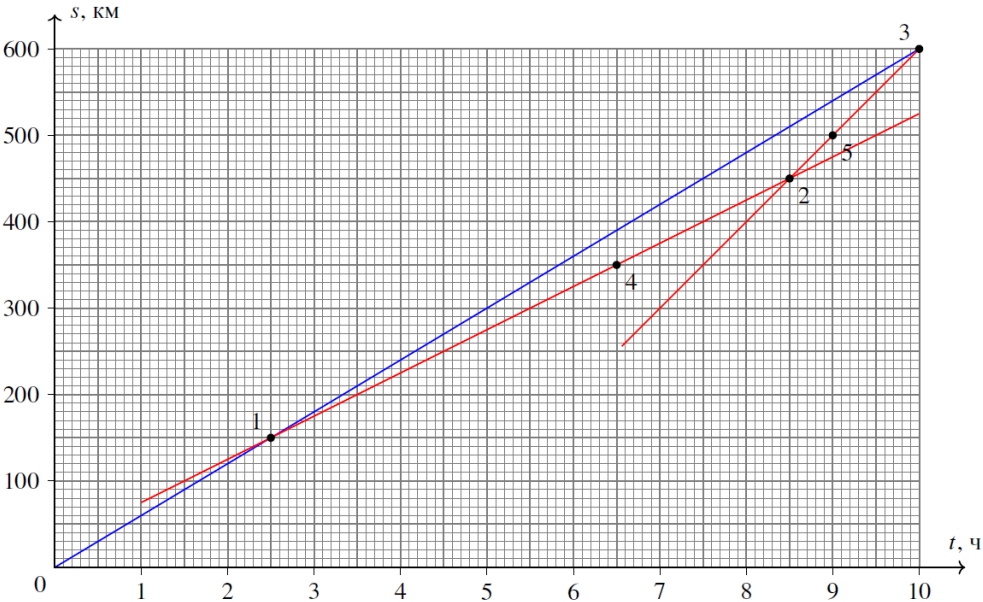


Рис. 1

3 ?? Протяженности l_1 , l_2 и l_3 в километрах первого, второго и третьего участков, соответственно.

Аналитическое решение:

Пусть T_1 — время движения Бага на первом участке. С учётом того, что расстояние $L - S_1 = 350$ км Баг проехал, двигаясь в течение времени T_1 со скоростью v_1 и времени $t - T_1$ со скоростью v_2 , запишем:

$$L - S_1 = v_1 T_1 + v_2 (t - T_1).$$

Откуда получим, что

$$T_1 = \frac{L - S_1 - v_2 t_1}{v_1 - v_2} = \frac{600 - 250 - 50 \cdot 6,5}{60 - 50} = 2,5 \text{ ч.}$$

При это протяженность первого участка составит $l_1 = v_1 T_1 = 150$ км.

Пусть T_2 — время движения Бага на втором участке, тогда $t - T_1 - T_2$ — время движения Бага на третьем участке. Для всего пути можно записать:

$$L = v_1 T_1 + v_2 T_2 + v_3 (t - T_1 - T_2)$$

.

Откуда получим

$$T_2 = \frac{v_1 T_1 + v_3 t - v_3 T_1 - L}{v_3 - v_2} = 6 \text{ ч}$$

.

При это протяженность второго участка составит $l_2 = v_2 T_2 = 300$ км.

Тогда протяженность третьего участка составит $l_3 = L - l_1 - l_2 = 150$ км.

Графическое решение:

График второго участка — это часть прямой, проходящей через точку 4. Наклон этой прямой соответствует скорости v_2 . Эта прямая пересекается с прямой, проведённой через точки 3 и 5, в точке 2, соответствующей границе второго и третьего участков пути. Прямая, проведённая через начало отсчёта и точку 3, пересекается с прямой, проведённой через точки 2 и 4, в точке 1, соответствующей границе первого и второго участка.

Прямая 3-5 описывается уравнением $S = -400 + 100 \cdot t$, прямая 4-2 описывается уравнением $S = 25 + 50 \cdot t$. Решая эту пару уравнений совместно, получим координаты точки 2: (8,5 ч; 450 км).

Прямая 0-3 описывается уравнением $S = 60 \cdot t$, прямая 4-2 описывается уравнением $S = 25 + 50 \cdot t$. Решая эту пару уравнений совместно, получим координаты точки 1: (2,5 ч; 150 км).

Откуда получим, что Баг ехал первые 2.5 ч со скоростью 60 км/ч, затем 6 ч со скоростью 50 км/ч, и в конце – 1,5 ч со скоростью 100 км/ч. Откуда $l_1 = 150$ км (участок 1-2 на рис. 1), $l_2 = 300$ км (участок 2-3 на рис. 1), $l_3 = 150$ км (участок 2-3 на рис. 1).

Ответ: $l_1 = 150$ км, $l_2 = 300$ км, $l_3 = 150$ км.



1 ?? Чему равна масса поплавка?

Определим массу поплавка m .
Запишем условие равновесия поплавка:

$$mg + T = \rho ghS, \tag{1}$$

где T — сила натяжения нити, ρghS — сила Архимеда, действующая на поплавок.
Запишем условие равновесия поршня:

$$T = \rho gHS_2. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) определим массу поплавка:

$$m = \rho(hS - HS_2). \tag{3}$$

Ответ: Масса поплавка: $\rho(hS - HS_2)$.

2 ?? На поплавок медленно положили тело массой Δm , в результате чего поршень сместился и занял новое положение равновесия. На какое расстояние и в какую сторону переместился поршень?

Поместим на поплавок тело массой Δm . Пусть поршень сдвинулся влево на расстояние Δx , а уровень жидкости в вертикальном сосуде увеличился на ΔH .
Поскольку нить, связывающая поршень и поплавок, нерастяжима, то при смещении поршня влево на Δx поплавок опустится на Δx .

Сделаем рисунок сосуда с трубкой в начальной ситуации (рис. 2 а) и после перемещения поршня (рис. 2б). Объем жидкости на рис. 2а, выделенный светло-серым цветом, равен объёму жидкости, выделенной светло-серым цветом, на рис. 2б.

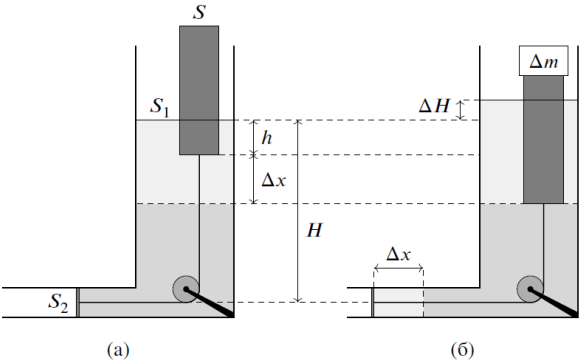


Рис. 2

Запишем условие неизменности объёма жидкости:

$$h(S_1 - S) + \Delta x \cdot S_1 = S_2 \cdot \Delta x + (\Delta x + h + \Delta H) \cdot (S_1 - S).$$

Из записанного соотношения получим связь ΔH и Δx :

$$\Delta H = \frac{\Delta x \cdot (S - S_2)}{(S_1 - S)}. \tag{4}$$

По условию задачи $S > S_2$, следовательно, наше предположение об увеличении высоты уровня жидкости в вертикальном сосуде верно и о том, что поршень смещается влево, верно.

Рассмотрим, как изменились силы, действующие на поплавок.

Новая сила Архимеда, действующая на поплавок:

$$F_{\text{Арх}} = \rho gS(h + \Delta H + \Delta x). \tag{5}$$

Обозначим изменившуюся силу натяжения сила T' , тогда условие равновесия для поплавка будет выглядеть следующим образом:

$$(m + \Delta m)g + T' = F_{\text{Арх}}. \tag{6}$$

Теперь рассмотрим новое условие равновесия поршня:

$$T' = \rho g(H + \Delta H)S_2. \tag{7}$$

Из уравнений (5), (6) и (7) с учетом (3) получим

$$\frac{\Delta m}{\rho S} = \Delta x + \Delta H \frac{(S - S_2)}{S}.$$

В последнее уравнение подставим (4) и выразим смещение поршня:

$$\Delta x = \frac{\Delta m}{\rho} \frac{(S_1 - S)}{(S_1S - 2SS_2 + S_2^2)}.$$

Ответ: Поршень смещается влево на величину:

$$\Delta x = \frac{\Delta m}{\rho} \frac{(S_1 - S)}{(S_1S - 2SS_2 + S_2^2)}.$$



1 ?? Существуют ли точки на столешнице, в которых можно разместить центр основания вазы с букетом так, чтобы столешница была горизонтальна?

Разместим вазу на столе и расставим силы, действующие на систему «столешница + ваза». Сила тяжести столешницы Mg приложена к центру столешницы, сила тяжести вазы mg приложена в точке расположения вазы. Эти силы направлены вертикально вниз. Три силы реакции ножек N_1 , N_2 и N_3 направлены вертикально вверх. Сила реакции четвертой ножки должна быть равна нулю.

Способ 1

Сделаем рисунок столешницы с видом сверху и введем систему координат XOY , начало координат поместим в центр столешницы (см. Рис. 3). Координаты точки, в которой находится ваза, обозначим x и y . На рисунке силы реакции ножек направлены перпендикулярно плоскости чертежа, на читателя, и обозначены черными кружками, а силы тяжести направлены перпендикулярно плоскости чертежа, от читателя и обозначены крестиками.

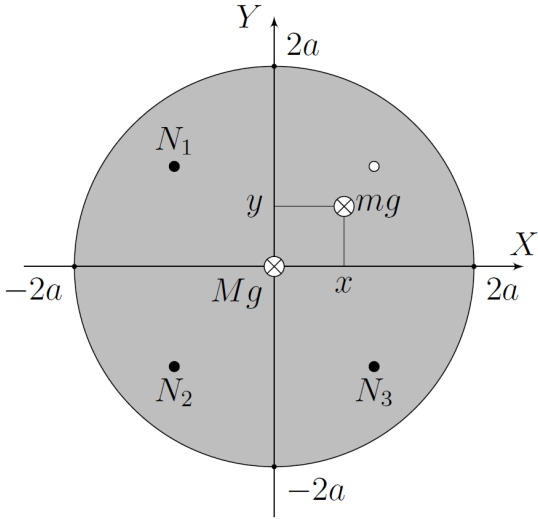


Рис. 3

Запишем условие равновесия системы:

$$(M + m)g = N_1 + N_2 + N_3, \tag{1}$$

правило моментов для оси OX :

$$N_1a = mgy + N_2a + N_3a, \tag{2}$$

И правило моментов для оси OY :

$$N_3a = mgx + N_1a + N_2a. \tag{3}$$

Подставим (2) в (3) и найдем N_2 :

$$N_2 = -\frac{mg}{2a}(x + y).$$

Чтобы столешница не переворачивалась, должно выполняться условие $N_2 \geq 0$,
а для этого должно выполняться условие $y + x \leq 0$ или

$$y \leq -x. \tag{4}$$

Из уравнения (3) выразим N_3 :

$$N_3 = mg\frac{x}{a} + N_1 + N_2.$$

Подставим N_3 и N_2 в (1) и определим N_1 :

$$N_1 = \frac{M + m}{2}g + \frac{mg}{2a}y.$$

Чтобы столешница не переворачивалась, должно выполняться условие

$$N_1 \geq 0,$$

следовательно, должно выполняться

$$\frac{M + m}{2}g + \frac{mg}{2a}y \geq 0.$$

Для выполнения этого условия нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$y \geq -(1 + \frac{M}{m})a. \tag{5}$$

Определим N_3

$$N_3 = \frac{M + m}{2}g + \frac{mg}{2a}x.$$

Чтобы столешница не переворачивалась, должно выполняться условие

$$N_3 \geq 0,$$

следовательно, должно выполняться

$$\frac{M + m}{2}g + \frac{mg}{2a}x \geq 0.$$

Для выполнения этого условия нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$x \geq -\left(1 + \frac{M}{m}\right)a. \tag{6}$$

Подставим $m = 5M$ и запишем все полученные условия и изобразим на поверхности столешницы область, в которой одновременно выполняются все три неравенства

$$y \leq -x; \tag{7}$$

$$y \geq -\left(1 + \frac{M}{m}\right)a = -\frac{6}{5}a; \tag{8}$$

$$x \geq -\left(1 + \frac{M}{m}\right)a = -\frac{6}{5}a. \tag{9}$$

Способ 2

Сделаем рисунок столешницы с видом сверху и введем систему координат $X'O'Y'$, начало координат поместим в точку, где находится вторая ножка (см. Рис. 4). Координаты точки, в которой находится ваза, обозначим x' и y' .

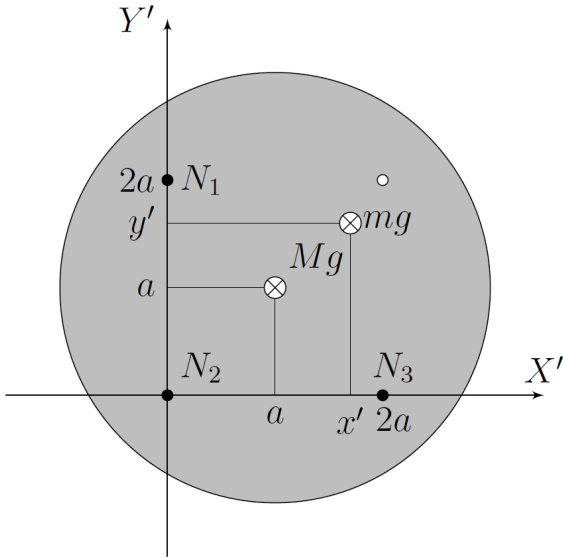


Рис. 4

Запишем условие равновесия системы

$$(M + m)g = N_1 + N_2 + N_3, \tag{1'}$$

правило моментов для оси $O'X'$

$$N_1 \cdot 2a = mgy' + Mga, \tag{2'}$$

И правило моментов для оси $O'Y'$

$$N_3 \cdot 2a = mgx' + Mga. \tag{3'}$$

Из уравнения (2') определим силу реакции первой ножки

$$N_1 = \frac{Mg}{2} + \frac{mg}{2a}y'.$$

Чтобы столешница не переворачивалась, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$N_1 \geq 0,$$

Откуда получаем область допустимых значений для y'

$$y' \geq -\frac{M}{m}a; y' \geq -\frac{a}{5}. \tag{4'}$$

Из уравнения (3') определим силу реакции третьей ножки

$$N_3 = \frac{Mg}{2} + \frac{mg}{2a}x'.$$

Чтобы столешница не переворачивалась, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$N_3 \geq 0,$$

Откуда получаем область допустимых значений для x'

$$x' \geq -\frac{M}{m}a; x' \geq -\frac{a}{5}. \tag{5'}$$

Из уравнения (1) определим силу реакции второй ножки

$$N_2 = Mg + mg - N_1 - N_3 = mg \left(1 - \frac{x'}{2a} - \frac{y'}{2a}\right).$$

Условие неотрицательности силы реакции второй ножки даёт неравенство

$$y' \leq 2a - x'. \tag{6'}$$

Геометрическое место точек, которые удовлетворяют неравенствам (4'), (5') и (6') находится в той же области на поверхности стола, что найдена в первом варианте.

2 ?? Если да, то укажите, все возможные их положения.

Ответ:
Область, где возможно размещение вазы, ограничена тремя прямыми, и выделена на рисунке тёмно-серым цветом.

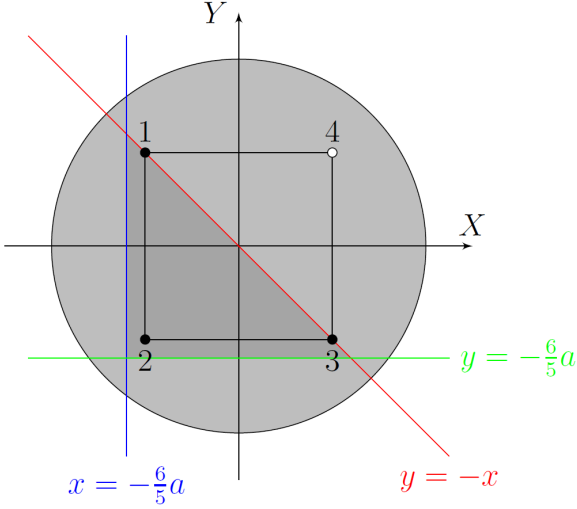


Рис. 5

 Website in English

2020 — Мы те, кого должны превзойти.



1 ?? Перечертите часть графика к себе в решение и восстановите его полную версию, считая, что включение плиты соответствовало времени $\tau_0 = 0$.

Запишем уравнение теплового баланса с учётом подведенного от плиты количества теплоты для первого участка графика:

$$P\tau = c\rho V_0(t - t_0). \tag{1}$$

Следовательно, на первом участке зависимость температуры t от времени τ описывается уравнением прямой:

$$t(\tau) = t_0 + \frac{P}{c\rho V_0}\tau = t_0 + k_1\tau. \tag{2}$$

Способ 1

На третьем участке уравнение теплового баланса:

$$P\tau = c\rho(V_0 + V_{\text{дол}})(t - t_0). \tag{3}$$

Здесь $V_{\text{дол}}$ — объём долитой воды.

Способ 2

Рассмотрим тепловые процессы, происходящие на трёх участках по отдельности. Введем обозначения: τ_1 — момент времени, когда начинается долив жидкости, τ_2 — момент времени, когда температура жидкости после доливания начинает увеличиваться.

Для первого участка имеем уравнение (1), оно записано выше.

В момент времени τ_1 температура воды в чайнике равна t_1 , поэтому

$$P\tau_1 = c\rho V_0(t_1 - t_0). \tag{5}$$

Для второго участка имеем уравнение (нагревается только долитая вода)

$$P(\tau - \tau_1) = c\rho V_{\text{дол}}(t - t_0). \tag{6}$$

В момент времени τ_2

$$P(\tau_2 - \tau_1) = c\rho V_{\text{дол}}(t_1 - t_0). \tag{7}$$

Для третьего участка

$$P(\tau - \tau_2) = c\rho(V_0 + V_{\text{дол}})(t - t_1). \tag{8}$$

Комбинируя уравнения (5), (7) и (8), получим уравнение (3).

Из уравнения (3) следует, что на третьем участке графика зависимость температуры t от времени τ описывается уравнением прямой:

$$t(\tau) = t_0 + \frac{P}{c\rho(V_0 + V_{\text{дол}})}\tau = t_0 + k_3\tau. \tag{4}$$

Графики функций, описываемых уравнениями (2) и (4), имеют общую точку — $(0, t_0)$. Поэтому, если графики продолжить до пересечения, то точка пересечения графиков будет лежать на оси температуры. Таким образом, можно восстановить масштаб по оси времени — одна клетка соответствует 0,5 мин. Масштаб по оси температур — одна клетка соответствует 10 °C восстанавливаем, зная температуры $t_1 = 60$ °C и $t_0 = 20$ °C. Зная, масштаб по осям и вид прямых восстанавливаем график на Рис. 2.

Ответ:

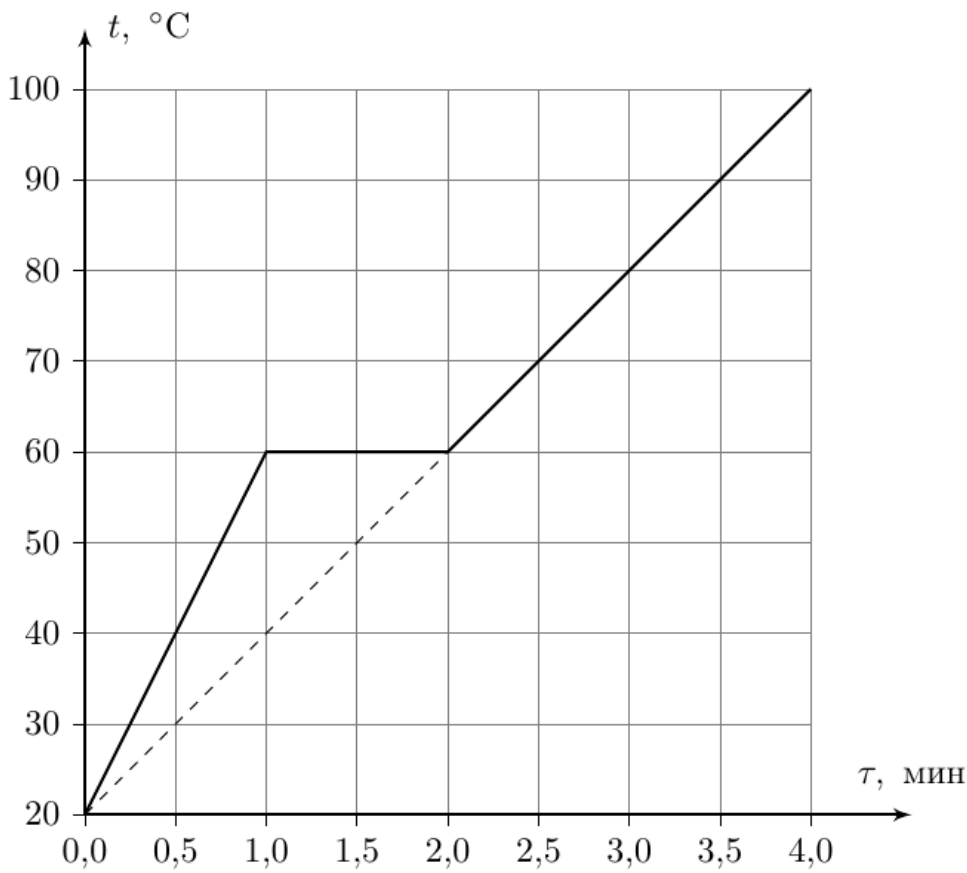


Рис. 2

2 ?? Какой изначальный объем воды V_0 Глюк налил в чайник?

Уравнения (2) и (4) описывают линейную зависимость температуры от времени с различными угловыми коэффициентами наклона k_1 и k_3 , отношение которых равно:

$$\frac{k_1}{k_3} = \frac{V_0 + V_{\text{дол}}}{V_0}. \tag{9}$$

По сохранившейся части графика определяем отношение $\frac{k_1}{k_3} = 2$.

Следовательно, объём долитой воды совпадает с начальным объёмом, поэтому $V_0 = V_{\text{дол}} = 0,5$ л.

Ответ: $V_0 = 0,5$ л.

3 ?? В какой момент времени чайник начал кипеть?

По графику на Рис. 2 определяем, что температура воды станет равной $100\text{ }^\circ\text{C}$ через $\tau_2 = 4$ мин после начала нагревания. Тот же результат можно получить, если сначала, используя уравнение теплового баланса для второго участка, определить значение мощности, а затем посчитать время нагревания до температуры $100\text{ }^\circ\text{C}$ на третьем участке.

Ответ: $\tau_2 = 4$ мин

4 ?? Какова была мощность плиты P ?

По условию задачи при доливании воды в течении $\Delta\tau = 1$ мин = 60 с температура воды не менялась, поэтому все полученное от нагревателя количество теплоты шло на нагревание добавленной воды от температуры $t_0 = 20\text{ }^\circ\text{C}$ до температуры $t_1 = 60\text{ }^\circ\text{C}$, поэтому:

$$P \cdot \Delta\tau = c\rho V_{\text{дол}}(t_1 - t_0). \tag{10}$$

Из записанного выражения определим мощность

$$P = \frac{c\rho V_{\text{дол}}}{\Delta\tau}(t_1 - t_0) = 1400 \text{ Вт}.$$

Ответ: $P = 1400$ Вт.